Hurwitzゼータ関数の導関数の二乗平均値に関するある漸近公式 (数論とその応用)

AUTHOR(S):

桂田, 昌紀; 松本, 耕二

CITATION:

桂田, 昌紀 ...[et al]. Hurwitzゼータ関数の導関数の二乗平均値に関するある漸近公式 (数論とその応用). 数理解析研究所講究録 1998, 1060: 66-90

ISSUE DATE:

1998-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/62371

数理解析研究所講究録
1060巻 1998年 66-90

Hurwitz ゼータ関数の導関数の二乗平均値に関するある漸近公式

鹿児島大学理学部　桂田昌紀
(Masanori Katsurada)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
松本耕二 (Kohji Matsumoto)

§1. 序.

1989年以来我々が展開していた, Dirichlet の L 関数 $L(s,\chi)$ ($s=\sigma+it$, χ は mod q の指標) の二乗平均

$$(1.1)\qquad \sum_{\chi \bmod q} |L(s,\chi)|^2$$

の q に関する漸近展開を求めるアイデアが, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,\alpha)$ のパラメータ α に関する二乗平均

$$(1.2)\qquad I(s)=\int_0^1 |\zeta_1(s,\alpha)|^2 d\alpha$$

(但し $\zeta_1(s,\alpha)=\zeta(s,\alpha)-\alpha^{-s}$) についても適用可能ではないかと気づいたのは, 1991年夏, 三陸海岸の宮古から盛岡へ帰るJR山田線の車内でのことであった。当時松本はまだ岩手大学におり, この時は上述の(1.1)に関する共同研究のため, 桂田が盛岡に数日間滞在して, セミナーを行なっていた。そ

の内のある日，気分転換のため三陸海岸にexcursionに行ったその帰途，すでに日は落ち，乗客もまばらなJRの車内には，眠気を誘うような列車の単調な音だけが響いていた。Zhang Wenpengの論文を通してたまたま知っていた(1.2)に，共同研究で培った(1.1)に対する手法と類似の方法が使えそうだという想いは，そんな車内での，半ば眠ったような朦朧とした我々の議論の上に，思いがけず舞い降りたのであった。

その年の秋，松本はイギリスに渡り，そこでは別のテーマを追いかけた。その間に日本では桂田が，上述のアイデアを具体化する最初の計算を開始していた。1992年6月頃から，この件で何通かの手紙がイギリスと日本の間を往復したりもしたが，(1.2)に対する本格的な共同研究は同年9月，松本が帰国してからのことになる。

最も興味深い $s=\frac{1}{2}+it$ $(t\in\mathbb{R})$ の場合，(1.2)の形の平均値をはじめて考えたのはKoksma と Lekkerkerkerである。彼らは $I(\frac{1}{2}+it)=O(\log t)$ $(t\geqq 2)$ を証明した([13])。この結果はその後，インド学派の数学者たち(Balasubramanian, Rane, Sitaramachandrarao)や Zhang Wenpeng によって順次改良され，1992年の時点では

$$I(\tfrac{1}{2}+it)=\log(t/2\pi)+\gamma+O(t^{-7/36}(\log t)^{25/18})$$

(γはEuler定数)を与えたZhang[16]が最良であった。

Zhang は同論文中で，右辺の残余項を $O(t^{-1/4})$ に改良できるであろうと予想している。一方，1992年11月に数理研で開かれた研究集会「数論の学際的研究」（代表者：金光滋氏）に招かれて来日したRamachandraも，我々との個人的な会話の中で全く同じ予想を述べた。ZhangもRamachandraもさらに，この指数 $-\frac{1}{4}$ は best-possible ではないかと予想している。実際，近似関数等式の手法に頼る限り，そのように感じても決して不自然ではないのである。

我々は1992年12月，上述したアイデアと近似関数等式を組み合わせた議論により，予想 $O(t^{-1/4})$ に到達した（[7]）。実は同じ頃，世界の各地でこの予想は証明されていた（Guo [2][3]，Andersson [1]，Zhang [17]）。しかし真相はさらに驚くべきものであった。Andersson [1] と Zhang [17] には，さらに精密な結果

$$(1.3)\quad I\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = \log\left(\frac{t}{2\pi}\right) + \gamma - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\frac{1}{2}+it} + O(t^{-1})$$

（$\zeta(s)$ は Riemann zeta）が含まれていたのである。

この (1.3) を我々は1993年3月，Zhangから送られてきた[17]のプレプリントではじめて知った。我々は全く驚いたのだが，実はその頃我々も，独自の路線で計算を先へ進めていた。当初，我々はその計算結果の意味を測りかねていたのだ

が，Zhang のプレプリントによって心の曇りが払われてみると，実は我々の計算が本質的に，(1·3) をさらに精密化する，次の漸近公式の証明を含んでいることが見えてきた。

定理1.（[8][10]） 任意の $K \in \mathbb{N}$ と $t \geqq 1$ に対し，

$$(1.4)\quad I(\tfrac{1}{2}+it) = \mathrm{Re}\,\psi(\tfrac{1}{2}+it) + (\gamma - \log 2\pi) - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta(\frac{1}{2}+it)-1}{\frac{1}{2}+it}$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{K}\frac{(k-1)!}{(k-\frac{3}{2}-it)(k-\frac{5}{2}-it)\cdots(\frac{1}{2}-it)(-\frac{1}{2}-it)}\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell^{-k}(\ell+1)^{-\frac{3}{2}+k-it}$$
$$+ O_K(t^{-K-1})$$

が成立する。但し $\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ である。

注意. $\mathrm{Re}\,\psi(\frac{1}{2}+it) = \log t + O(t^{-2})$ であるので，(1·3) は (1·4) から直ちに従う。

§2. 基本等式.

実は定理1は，次の定理2において $u = \frac{1}{2}+it+\delta$，$v = \frac{1}{2}-it+\delta$ とおき，$\delta \to 0$ の極限をとることで直ちに証明できる。

定理2.（[8][10]） u と v を複素変数で，$0 < \mathrm{Re}\,u < 2$，$0 < \mathrm{Re}\,v < 2$ を満たすものとするとき，（右辺が特異点を含まない限り）次の等式が成立する。

$$(2.1)\quad \int_0^1 \zeta_1(u,\alpha)\zeta_1(v,\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{u+v-1} + R(u,v)$$
$$- S(u,v) - S(v,u) - T(u,v) - T(v,u),$$

ここに

$$(2.2)\quad R(u,v)=2(2\pi)^{u+v-2}\zeta(2-u-v)\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)\cos\left(\frac{\pi}{2}(u-v)\right),$$

$$(2.3)\quad S(u,v)=\frac{\zeta(u)-1}{1-v},$$

$$(2.4)\quad T(u,v)=\frac{u}{1-v}\sum_{l=1}^{\infty}l^{1-u-v}\int_{l}^{\infty}\beta^{u+v-2}(1+\beta)^{-u-1}d\beta$$

である。――――

この定理2が我々の理論における基本定理であり，その証明は[10]に詳述されているが，Atkinsonのdissection argumentに基づくものである。実際には[10]で証明されている定理はより一般的な形のものであり，そのような一般化はAndersson型のexplicit formula[1]との関連で重要なのではあるが，ここでは上述の形の結果にとどめておく。

定理2におけるひとつの重要な利点は，Atkinsonの方法の大きな特徴なのだが，二変数u，vの式になっていることである。従って，uとvについてそれぞれ個別に微分しておいてから値を特殊化することにより，高次導関数の場合の平均値を見通しよく計算することができる。これはDirichletのL関数の場合にKatsurada[6]によって有効に利用された考え方であるが，同じようにして

$$(2.5)\quad I_h(s)=\int_0^1|\zeta_1^{(h)}(s,\alpha)|^2d\alpha$$

($\zeta_1^{(k)}$ は s に関する k 階微分）を扱うことはできないだろうか。それが実際に可能であることを述べるのが，本稿の主要目的である。

定理2を軸とした理論の構造が一旦明らかになると，その後の我々の研究の進展はしばらく順調だった。1993年の3月から6月にかけて，整数点における explicit formula や $I_k(s)$ に関する結果が次々と得られ，同年秋に出た速報[8]には上述した定理1，2と共に，こうした新結果まで載せることができた。整数点の場合の計算の詳細は，その後1996年に得られた若干の新知見を含めて，[11]で論じられている。（講究録にもひとつ報告を書いている([9])。内容はほぼ[8]と同じだが，正の整数点での explicit formula はここで初めてアナウンスしたものである。）

§3. $I_k(s)$ についての初期の成果.

さて，導関数の平均値 $I_k(s)$ の研究という方向を切り開いたのは，Zhang Wenpeng であった。彼は[15]において，$k=1$ の場合に限ってではあるが，次の漸近式を証明した。

$$(3.1)\quad I_1\left(\tfrac{1}{2}+it\right)=\frac{1}{3}\log^3(t/2\pi)+\gamma\log^2(t/2\pi)+A\log(t/2\pi)+B+O\left(t^{-1/6}(\log t)^{10/3}\right)$$

（A, B はある定数）。我々が $I_k(s)$ の研究に深く入りこんだのも，この Zhang の論文の存在に刺激されたためであると言

うこともできる。Zhang の証明は近似関数等式に基づくものである。

これに対し我々の方針は，まず(2.1)を u，v についてそれぞれ h 回微分した式を作る：

$$(3.2)\quad \int_0^1 \zeta_1^{(h)}(u,\alpha)\zeta_1^{(h)}(v,\alpha)\,d\alpha = \frac{(2h)!}{(u+v-1)^{2h+1}}$$
$$+\frac{\partial^{2h}}{\partial u^h \partial v^h}\{R(u,v)-S(u,v)-S(v,u)-T(u,v)-T(v,u)\}.$$

このままの形では $u=\frac{1}{2}+it$，$v=\frac{1}{2}-it$ を代入すると右辺に無限大となる項が出てきてしまうので，$u=\frac{1}{2}+it+\delta$, $v=\frac{1}{2}-it+\delta$ とおいて $\delta\to 0$ の極限をとり，特異性の cancellation を見てやれば，$I_h(\frac{1}{2}+it)$ の漸近式が出せるはずである。しかし現実には，この極限計算が，h が大きくなると急速に複雑になる。1993 年 6 月の段階では，極限計算は $h=1$ の場合のみでしか実行していなかった。(*) それでも Zhang の (3.1) を改良することはできた。我々の結果は次の explicit formula である：

$$(3.3)\quad I_1(\tfrac{1}{2}+it) = \mathrm{Re}\left\{\tfrac{1}{3}\psi^3(\tfrac{1}{2}+it)-\tfrac{1}{6}\psi''(\tfrac{1}{2}+it)+a_0\psi^2(\tfrac{1}{2}+it)\right.$$
$$\left.-2a_1\psi(\tfrac{1}{2}+it)\right\}+2a_2-2\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{(\frac{1}{2}+it)^2}$$
$$-2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2 T}{\partial u\partial v}(\tfrac{1}{2}+it,\tfrac{1}{2}-it),$$

(*) それでも計算は少々複雑である．この6月，我々は二人ともハンガリーで開かれた解析的整数論の Conference に参加したのだが，経由地であるフランクフルトへ向かう機内で，二人で極限計算の詳細をひたすらチェックしていたことを思い出す。

ただし

$$a_0 = \gamma - \log 2\pi,$$

$$a_1 = -\gamma_1 - \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}(\log 2\pi)^2 + \gamma \log 2\pi,$$

$$a_2 = \gamma_2 + \frac{1}{8}\pi^2\gamma - \frac{1}{6}(\log 2\pi)^3 + \frac{1}{2}(\log 2\pi)^2\gamma - \left(\frac{\pi^2}{8}+\gamma_1\right)\log 2\pi$$

であり，また γ_j は

$$\zeta(1+s) = s^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j s^j \qquad (\gamma = \gamma_0)$$

で与えられる定数である。そして (3.3) にさらに ψ や ψ'' の漸近公式 $\left(\psi(s) = \log s - \frac{1}{2s} + O(|s|^{-2})\ \text{など}\right)$ を代入すると，

$$(3.4)\quad I_1\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = \frac{1}{3}\log^3(t/2\pi) + \gamma\log^2(t/2\pi) + 2\gamma_1\log(t/2\pi) + 2\gamma_2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{(\frac{1}{2}+it)^2}\right\} - 2\,\mathrm{Re}\frac{\partial^2 T}{\partial u\partial v}\left(\tfrac{1}{2}+it, \tfrac{1}{2}-it\right) + O(t^{-2}(\log t)^2)$$

を得る。これが速報[8]の末尾でアナウンスしている式である。これを Zhang の (3.1) と比べると，まず定数 A，B の値が明確な形に決定されている。そして Zhang の $O(t^{-1/6}(\log t)^{10/3})$ は，

$$(3.5)\quad -2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{(\frac{1}{2}+it)^2}\right\} - 2\,\mathrm{Re}\frac{\partial^2 T}{\partial u\partial v}\left(\tfrac{1}{2}+it, \tfrac{1}{2}-it\right) + O(t^{-2}(\log t)^2)$$

に置きかえられている。この第二項について当時我々の持っていた評価は $O(t^{-1})$ だったので，(3.5) そのものも $O(t^{-1})$ と評価でき，これはもちろん Zhang による評価を改良している。

しかし実は，その頃の我々には知る由もなかったのだが，殆んど同等の評価を得た論文を，Guo Jinbao が既に1992年に

中国の雑誌に投稿していた。このGuo[4]は1994年になって出版されるが，その中で彼はZhangのA，Bを(3.4)と同じ形に決定し，Zhangの残余項を$O(t^{-1}(\log t)^2)$へと改良している。これは我々が[8]でアナウンスした$O(t^{-1})$とほぼ同等である。もっともGuoは(3.5)の形には到達しておらず，現在では(3.5)の第二項について評価$O(t^{-2})$が判明しているので，結局我々は現在，$k=1$の場合について，

定理3.

$$(3.6)\quad I_1\left(\tfrac{1}{2}+it\right)=\frac{1}{3}\log^3(t/2\pi)+\gamma\log^2(t/2\pi)+2\gamma_1\log(t/2\pi)$$
$$+2\gamma_2-2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{(\frac{1}{2}+it)^2}\right\}+O(t^{-2}(\log t)^2).$$

を手にしているわけである。これは言うまでもなくGuoの結果をさらに改良している。

§4. Explicit formula.

我々が(3.3)を示したのは上述のように1993年6月であったが，その後我々は自然な希望として，一般のkに対しても何らかの結果を出せないか，と思い始めた。しかし既に述べたように，(3.2)からの極限計算は一般のkについては途方もなく複雑である。何らかのアイデアが必要なことははっきりしていたが，適切なアイデアをすぐに思いつくはずもなく，何となく投げ出したような状態がしばらく続いた。二人とも

各々の別の仕事に取り組んだりしているうちに，夏は過ぎ，秋も深まってきた1993年11月，ひとつの新しい試みがなされた。それは要するに，アイデアが出ない以上，アイデアなしでとにかく強引に極限計算してしまおう，ということであった。そして一般のkに対する$I_k(\frac{1}{2}+it)$のひとつのexplicitな式が得られたが，それは$k=1$の場合ですら項が150個も出てくるという，どうしようもなく非実用的な式であった。あまりのひどさにあきれつつ，我々はこれを「やぶれかぶれformula」と呼んだ。

しかし，あきれつつも我々は，このformulaの改良に取り組んだ。色々な漸化式を考えてみたり，Stirling数に関する組合せ論の公式を用いてみたりといった試行錯誤を経て，1994年4月には，多少とも実用性のある「改良版やぶれかぶれformula」に到達した。その結果を述べよう。

基本等式(2.1)の右辺をuとvでk回微分するとき，すぐわかるように$S(u,v)$は変数uとvが分離されているので，何の問題もない。また$T(u,v)$の部分は後述するようにかなり小さくなる。残るのは$R(u,v)$であるが，ここは特異性の出てくる部分でもあり，最も難しい所なのである。特異性は$(u+v-1)^{-1}$からくる特異性とcancelするので，この項と合わせたものについて考えると，我々の「改良版やぶれかぶれ

formula」は次のようになる。

<u>定理4</u>（一般 explicit formula）

$$(4.1)\quad \frac{\partial^{2h}}{\partial u^h \partial v^h}\left(\frac{1}{u+v-1}+R(u,v)\right)\Bigg|_{u=\frac{1}{2}+it,\ v=\frac{1}{2}-it}$$

$$=2\sum_{\mu,\nu=0}^{h}\binom{h}{\mu}\binom{h}{\nu}(2h-\mu-\nu)!\left\{D_{2h-\mu-\nu}\,\mathrm{Re}\,(C_0(\mu,\nu))\right.$$

$$\left.+(-1)^{1-\mu-\nu}2^{\mu+\nu-2h-2}\,\mathrm{Re}\,(C_{2h-\mu-\nu+1}(\mu,\nu))\right\},$$

但し $C_m(\mu,\nu)$, D_m は次のように定める。まず $A_k=A_k(t)$, $B_k=B_k(t)$ を Taylor 展開

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+it+z\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k,\quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+it+z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k z^k$$

で定め，

$$C_m(\mu,\nu)=\sum_{k=0}^{m}A_{k+\mu}B_{m-k+\nu}(-1)^{m-k+\nu}\cdot\frac{(k+\mu)!\,(m-k+\nu)!}{k!\,(m-k)!}.$$

また E_k も Taylor 展開

$$\frac{1}{2}(2\pi)^z\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}(1+z)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}E_k z^k$$

で定め，γ_k は §3 で与えたものとして，

$$D_m=-E_{m+1}+\sum_{k=0}^{m}E_{m-k}(-1)^k\gamma_k$$

とする。——————

この式は，h をひとつ固定すれば，計算のアルゴリズムを完全に与えている。数式処理のソフトにかければ言うまでもないが，小さい h に対しては手計算でも，人間の神経の耐えうる限度内で，最終結果まで書き下すことが可能だと思わ

れる。実際 $k=1$ の場合にこの式から(3.3)を出すことは高々数ページの計算でできる。また $k=2$ の場合には，やや繁雑になるが，多少の忍耐により，次の式を示すことができる：

$$(4.2)\quad I_2\left(\tfrac{1}{2}+it\right)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{5}\psi^5-\psi(\psi')^2+\frac{1}{30}\psi''''+2D_0\psi^4\right.$$
$$\left.-2D_0(\psi')^2-8D_1\psi^3+24D_2\psi^2-48D_3\psi+48D_4\right\}$$
$$-4\,\mathrm{Re}\frac{\zeta''(\frac{1}{2}+it)}{(\frac{1}{2}+it)^3}-2\,\mathrm{Re}\frac{\partial^4 T}{\partial u^2\partial v^2}\left(\tfrac{1}{2}+it,\tfrac{1}{2}-it\right),$$

ただし ψ, ψ' などはそれぞれ $\psi(\frac{1}{2}+it)$, $\psi'(\frac{1}{2}+it)$ などの略記である。ここからさらに D_m の値なども代入して計算すると，

$$(4.3)\quad I_2\left(\tfrac{1}{2}+it\right)=\frac{1}{5}\log^5(t/2\pi)+\sum_{j=0}^{4}\frac{4!}{(4-j)!}\gamma_j\log^{4-j}(t/2\pi)$$
$$+O\left(t^{-2}(\log t)^4\right)$$

を得る。

　ところで，今までに得られた $k=1$ と $k=2$ の場合の結果を眺めていると，explicit formula (3.3), (4.2) よりも，そこから導かれる漸近式(3.6), (4.3) の方が自然で見やすい形になっていることがわかる。このことは，(3.3), (4.2)，あるいは定理4のような explicit formula が，あまり整ったものではないことを意味しているのかもしれない。実際，(4.2) から (4.3) を出す時にはかなり多くの項が打ち消しあうことが観察できる。そうすると，explicit formula を経由せずに，基本等式(2.1) から直接(3.6)や(4.3)のような漸近式を出す道を探す方が得策か

もしれない，という着想が浮かんでくる。今までの議論では explicit formula をまず示してから，その各項に Stirling の公式を用いて変形していたわけだが，もっと早い段階で Stirling を用いてはどうだろうか。もちろん当初からこのように整理された考えがあったわけではないが，u と v について微分する前に $R(u,v)$ に Stirling を用いて変形しておくということを基盤の着想として，既に1994年の早い時期に，「やぶれかぶれ formula」の改良を探す試みと並行して，我々は別の方針を模索しはじめていた。

§5. The Dark Method.

前節末に言及した方針による研究は，1994年3月に盛岡で数日間行なった共同研究セミナーにおいて，劇的に進展した。このセミナーで，後に補題として述べる一連の結果が次々と証明され，それをもとにして，一気に一般の k に対する次の漸近公式に我々は到達したのである：

<u>定理5.</u> 任意の整数 $k \geqq 2$ と実数 $t \geqq 2$ に対し，

$$(5.1)\quad I_k\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = \frac{1}{2k+1}\log^{2k+1}(t/2\pi) + \sum_{j=0}^{2k} \frac{(2k)!}{(2k-j)!}\gamma_j \log^{2k-j}(t/2\pi) + O(t^{-2}(\log t)^{2k})$$

が成立する。———

この定理で $k=2$ とすると明らかに(4.3)を得る。またこの定理の証明は $k=1$ の場合にもそのまま通用して，その時には結果として(3.6)が出てくる。実は $k\geqq 2$ の場合にも，

$$(5.2)\qquad -2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{k!\,\zeta^{(k)}(\frac{1}{2}+it)}{(\frac{1}{2}+it)^{k+1}}\right\}$$

という項が出てくるのだが，$k\geqq 2$ だとこの項は(5.1)の残余項に吸収されてしまうのである。定理5（及び定理3）は[11]にアナウンスされ，証明の詳細は[12]に述べる予定である。

定理5の証明は次節で略述するが，それはいささか込み入ったものである。鍵となる補題も，計算したらそうなったというだけで，例えば補題の(iv)（次節参照）の右辺において $(\xi+\eta)$ なる因子がくくり出せる本質的な理由など，今もって謎である。盛岡においてこの結果に到達した時，我々はなにか，暗いトンネルの中を驀進していたら出口に着いていた，というような印象を持ったものである。以来この方法は，我々の間では The Dark Method と通称されることとなった。

既に述べたように，基本等式(2.1)の右辺に出てくる量のうち，$S(u,v)$ は変数が分離されているので微分は容易であって，ここから出てくる項が(5.2)である。また $T(u,v)$ は微分すると小さくなる量であって，

$$(5.3)\qquad \frac{\partial^{2k} T}{\partial u^k \partial v^k}(\sigma+it, \sigma-it) = O(|t|^{-k-1}) \qquad (0<\sigma<2)$$

を示すことができる。そこで問題はやはり $R(u, v)$ なのであるが，次節で $R(u, v)$ の Dark Method による扱いをスケッチすることにしよう。

§6. 定理5の証明（スケッチ）

微分する前に Stirling の公式を用いて変形しておくとどうか，というのが Dark Method の当初の基本的着想であったことは既述した。ところが出来上った証明を整理していくうちに，実は Stirling は結局不要であり，むしろ微分する前に Taylor 展開しておくことがひとつの鍵となるアイデアであることが判明してきた。

今までは極限計算の時に $u=\frac{1}{2}+it+\delta$, $v=\frac{1}{2}-it+\delta$ とおいて $\delta\to 0$ としてきたが，Dark Method では $u=\frac{1}{2}+it+\xi$, $v=\frac{1}{2}-it+\eta$ とおく。ここで ξ, η は複素変数で，0の近傍にあるものとする。最終的には $(\xi,\eta)\to(0,0)$ とするのであるが，このようにすることで Atkinson 流の，複素二変数の関数という状態が維持されていることに注意されたい。すると

$$(6.1)\qquad \frac{1}{u+v-1} + R(u, v) = \frac{1}{\xi+\eta} + R\left(\tfrac{1}{2}+it+\xi,\ \tfrac{1}{2}-it+\eta\right)$$

であり，さらに(2.2)から

(6.2) $R(\frac{1}{2}+it+\xi, \frac{1}{2}-it+\eta)=\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\xi-\eta}\zeta(1-\xi-\eta)\Phi(\xi,\eta;t)$,

ここに

(6.3) $$\Phi(\xi,\eta;t)=\frac{1}{\pi}t^{\xi+\eta}\Gamma(\tfrac{1}{2}-it-\xi)\Gamma(\tfrac{1}{2}+it-\eta) \times\cosh(\pi t-\tfrac{\pi i}{2}(\xi-\eta))$$

となる。Riemannゼータの Laurent 展開により

(6.4) $$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\xi-\eta}\zeta(1-\xi-\eta)=-\frac{1}{\xi+\eta}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\xi+\eta)^k,$$

(6.5) $$a_k=(-1)^k\left\{\frac{1}{(k+1)!}\log^{k+1}(t/2\pi)+\sum_{l=0}^{k}\frac{\gamma_l}{(k-l)!}\log^{k-l}(t/2\pi)\right\}$$

を得る。また ξ,η が小さい時 $\Phi(\xi,\eta;t)$ は正則なので，その Taylor 展開を

(6.6) $$\Phi(\xi,\eta;t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}b_{mn}\xi^m\eta^n$$

とおく。係数 b_{mn} は t の関数となるわけだが，この b_{mn} の性質が，前節で予告した次の補題である。

<u>補題</u>.

(i) $b_{00}=1$.

(ii) $b_{10}=b_{01}=\log t-\mathrm{Re}\,\psi(\frac{1}{2}+it)$ ($=b_1$ と記すことにする).

(iii) $f(t)=(\log t-\psi(\frac{1}{2}+it))(\log t-\psi(\frac{1}{2}-it))$ とおくと，

$$b_{20}=-\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}\psi'(\tfrac{1}{2}-it)$$

$$b_{11}=\frac{1}{4}\pi^2+f(t)+\frac{1}{2}(\psi(\tfrac{1}{2}+it)-\psi(\tfrac{1}{2}-it))^2$$

$$b_{02}=-\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}\psi'(\tfrac{1}{2}+it).$$

とくに

$$b_{20} = -\frac{1}{2it} + O(t^{-2}), \quad b_{02} = \frac{1}{2it} + O(t^{-2}).$$

(iv) $$\sum_{m+n=2} b_{mn}\xi^m\eta^n = (\xi+\eta)\,C(\xi,\eta;t),$$

ただし

$$C(\xi,\eta;t) = -\frac{\pi^2}{8}(\xi+\eta) + \frac{1}{2}f(t)(\xi+\eta) + \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{1}{2}-it\right)(\xi-\eta) + \frac{\pi^2\eta}{2\cosh^2(\pi t)}.$$

(v) $(m,n) \neq (0,0),\ (2,0),\ (0,2)$ なら

$$b_{mn} = O(t^{-2}).$$

証明は，(i)〜(iv) については計算すれば出る。評価 (v) は Cauchy の積分公式を用い，少々工夫も必要であるが詳細は略す。

そこで (6.2), (6.4), (6.6) と補題の (i), (ii), (iv) から

(6.7)
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{u+v-1} + R(u,v) \\
&= \frac{1}{\xi+\eta} + \left\{-\frac{1}{\xi+\eta} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi+\eta)^k\right\}\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}\xi^m\eta^n\right\} \\
&= \frac{1}{\xi+\eta} \\
&\quad - \frac{1}{\xi+\eta}\left\{1 + b_1(\xi+\eta) + (\xi+\eta)C(\xi,\eta;t) + \sum_{m+n\geqq 3} b_{mn}\xi^m\eta^n\right\} \\
&\quad + \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi+\eta)^k\right\}\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}\xi^m\eta^n\right\} \\
&= -b_1 - C(\xi,\eta;t) - \frac{1}{\xi+\eta}\sum_{m+n\geqq 3} b_{mn}\xi^m\eta^n \\
&\quad + \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi+\eta)^k\right\}\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}\xi^m\eta^n\right\}
\end{aligned}$$

となる。変形の最後の所で $\frac{1}{\xi+\eta}$ の項が cancel してしまうこと，また補題の (iv) の右辺の $(\xi+\eta)$ なる因子の存在がきいていることに注意されたい。

次に $h \geqq 1$ として (6.7) の両辺に $\partial^{2h}/\partial\xi^h\partial\eta^h$ を施すと，$C(\xi,\eta;t)$ が ξ と η について1次式であることから，右辺の $-b_1-C(\xi,\eta;t)$ の項は消えてしまい，

$$(6.8)\quad \frac{\partial^{2h}}{\partial\xi^h\partial\eta^h}\left(\frac{1}{u+v-1}+R(u,v)\right)$$
$$=\frac{\partial^{2h}}{\partial\xi^h\partial\eta^h}\left[-\frac{1}{\xi+\eta}\sum_{m+n\geqq 3} b_{mn}\xi^m\eta^n + \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi+\eta)^k\right\}\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}\xi^m\eta^n\right\}\right]$$

となる。ここでさらに $(\xi,\eta)\to(0,0)$ とするわけであるが，そのとき右辺の $\left\{\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\xi+\eta)^k\right\}\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty}b_{mn}\xi^m\eta^n\right\}$ からの寄与は

$$(6.9)\qquad (2h)!\, a_{2h} + O(t^{-2}(\log t)^{2h})$$

となる。ここで補題の (v)，及び $b_{20}+b_{02}=O(t^{-2})$ となること（補題の (iii) による）が用いられる。

一方 $\frac{1}{\xi+\eta}\sum_{m+n\geqq 3} b_{mn}\xi^m\eta^n$ であるが，この項は見かけ上 $(\xi+\eta)^{-1}$ なる因子をもつにもかかわらず，実は ξ,η について正則である。それは (6.7) の両辺を比較すると，この項以外のすべての項が正則であることからわかる。そこで改めて

$$(6.10)\qquad \frac{1}{\xi+\eta}\sum_{m+n\geqq 3} b_{mn}\xi^m\eta^n = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu$$

とTaylor展開する。すると(6.8)において$(\xi,\eta)\to(0,0)$とした時，この項からの寄与は明らかに $-(k!)^2 c_{kk}$ である。ところが(6.10)から，係数 b_{mn} と $c_{\mu\nu}$ との間には

$$\begin{cases} c_{00}=c_{10}=c_{01}=0, \\ c_{\mu-1,\nu}+c_{\mu,\nu-1}=b_{\mu\nu} \quad (\text{if } \mu+\nu\geqq 3) \end{cases}$$

なる関係があることがわかる（但し $\mu<0$ 又は $\nu<0$ なら $c_{\mu\nu}=0$ と定める）。とくに $m\geqq 2$ なら補題の(v)により

$$c_{m,0}=b_{m+1,0}=O(t^{-2})$$

であり，ここから $0\leqq r\leqq m$ に対して帰納的に，

$$c_{m-r,r}=b_{m-r+1,r}-c_{m-r+1,r-1}=O(t^{-2})$$

となる。従ってとくに $c_{kk}=O(t^{-2})$ を得る。

こうして結局，$(\xi,\eta)\to(0,0)$ のとき，(6.8)の右辺は

$$(2k)!\,a_{2k}+O(t^{-2}(\log t)^{2k})$$

となることがわかった。ここに a_{2k} の定義(6.5)を代入すれば，定理5（$k=1$ なら定理3）の主張が直ちに従う。

§7. 結語と展望

このようにして定理5は，実質的には1994年春には得られていたのだが，その後，基礎となる定理2の証明を述べた[10]がなかなかacceptされなかった，といった事情もあって，再びこの方向の研究は放置されてしまうことになった。その

年の12月，松本はZhang Wenpengに招かれて中国・西安にある西北大学を訪問した。そしてそこでのセミナーで定理5にも言及したが，これがこの定理を公表した最初の機会であった。この時にはGuo Jinbaoも延安から西北大学に来ており，それまで気づいていなかったGuoの諸結果を知る機会にもなった。彼の[4]は，後日彼から別刷を送ってもらってはじめて知ったのである。(Guoはその後，[5]も発表している。)(それにしても本場の中華料理はやはりおいしかった。)

しかし，この方向での我々の共同研究が復活するには，1996年まで待たねばならなかった。この年の9月，松本はリトアニアのPalangaで開かれたKubilius記念国際Conferenceに参加するが，そこでのtalkのテーマとして，$I(s)$, $I_h(s)$に関する一連の結果を選び，定理5にも再び言及した。そして我々は，このConferenceのProceedingsに，長らく放置していた$I(s)$の整数点における公式について書いて投稿することにした([11])。そして同時に，$I_h(s)$について得られている諸結果もこの機会にまとめてしまうことにしたわけである。

Dark Methodの計算の本格的な再検討は，1997年に入ってからのことになったが，実は証明に少々不備な点があったことが発見された。幸いそれはすぐに修正された。またStirlingが結局不要であることが判明するなど，当初の複雑怪奇な証

明は次第に整理されてきて，少しずつ Dark ではなくなってきた。（実際，1994年の時点で我々が公表をためらったひとつの理由は，Dark Method の議論があまりに複雑で，これはもっと簡易化できるはずだという直観があったからである。）前節で述べた証明はこうして整理されたものである。さらに評価 (5.3) など，新しく判明する事実も出てきた。

一方，explicit formula（定理4）についても再検討を行なった。とくに固定した h に対して具体的な式を書き下す部分の計算の構造が整理され，$h=2$ の場合の結果 (4.2), (4.3) が新しく導かれた。

定理5の大変美しい結論は，現時点では Dark Method によってのみ証明されており，定理4から一般の h に対して定理5を導くことは極めて困難だと思われる。それではもはや定理4のようなアプローチは無意味なのかというと，必ずしもそうとは言い切れない。その理由のひとつは，定理5はあくまでも漸近式にすぎないが，定理4は完全な等式を与えているという点にある。従って本当は，定理4の方が $I_h(s)$ の完全な情報を含んでいるはずなのである。

また，$s=\frac{1}{2}+it$ の場合以外に，極限計算が必要でかつ興味深い場合として，$s=1+it$ がある。この場合の Hurwitz ゼータの（α に関する）平均値の研究は，Zhang Wenpeng とそ

の学派によって考察されており（Zhang[18][19]，Wang[14]），また $I(1+it)$ についてのある explicit formula を我々が［10, Corollary 3］で与えている。そこで $I_k(1+it)$ についても何か言えないか，と考えるのは自然であるが，実はこの場合に Dark Method のアナロジーを展開することはまだ出来ていない。ところが explicit formula の方は Dark の場合のような巧妙な工夫がない分だけアナロジーが考えやすく，実は $I_k(1+it)$ に対する定理4のアナロジーは，既に1994年の時点で得られていたのである。さらに $k=1$ の場合の(3.3)や，$k=2$ の場合の(4.2)に対応する式も我々は得ている。要するに現時点では，我々の理論の枠内では，$s=1+it$ の場合の考察は，explicit formula からのアプローチが唯一可能なのである。

定理5の方向での残された大きな課題は，その残余項 $O(t^{-2}(\log t)^{2k})$ を，真の漸近展開式でおきかえることであろう。そのためには更なるアイデアが要求されていることは言うまでもない。あるいはひとまず，残余項のオーダーを t^{-4} まで下げることを試みれば，もう少し漸近式の構造が見えてくるかもしれない。この方向を攻略するにはかなりの困難が伴うであろうが，しかし全く手掛りがないわけでもない，と我々は感じている。

文献.

[1] J. Andersson, Mean value properties of the Hurwitz zeta-function, Math. Scand. 71 (1992) 295-300.

[2] Guo Jinbao, On Hurwitz zeta-function, Kexue Tongbao 36 (1991) 713-714 (in Chinese).

[3] ——, On Hurwitz zeta-function, J. Math. (Wuhan) 14 (1994) 152-156 (in Chinese).

[4] ——, On the mean value formula of the derivative of Hurwitz zeta-function, J. Yanan Univ. 13 (1994) 45-51, 65 (in Chinese).

[5] ——, A class of new mean value formulas for the derivative of the Hurwitz zeta-function, J. Math. Res. Exposition 16 (1996) 549-553 (in Chinese).

[6] M. Katsurada, Asymptotic expansions of the mean values of Dirichlet L-functions III, Manuscripta Math. 83 (1994) 425-442.

[7] M. Katsurada and K. Matsumoto, Discrete mean values of Hurwitz zeta-functions, Proc. Japan Acad. 69A (1993) 164-169.

[8] —— and ——, Explicit formulas and asymptotic expansions for certain mean square of Hurwitz zeta-functions, Proc. Japan

Acad. 69A (1993) 303-307.

[9] ——— and ———, Some asymptotic results on Hurwitz zeta-functions, 数理解析研究所講究録 886 (1994) 114-123.

[10] ——— and ———, Explicit formulas and asymptotic expansions for certain mean square of Hurwitz zeta-functions I, Math. Scand. 78 (1996) 161-177.

[11] ——— and ———, ——— II, in "Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. Proc. 2-nd Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, Sept. 1996", New Trends in Probab. and Statist. Vol. 4, A. Laurinčikas et al. (eds.), VSP/TEV, 1997, pp. 119-134.

[12] ——— and ———, ——— III, in preparation.

[13] J.F. Koksma and C.G. Lekkerkerker, A mean value theorem for $\zeta(s, w)$, Indag. Math. 14 (1952) 446-452.

[14] Wang Yonghui, On the 2k-th mean value of Hurwitz zeta-function, Acta Math. Hungar. 74 (1997) 301-307.

[15] Zhang Wenpeng, The Hurwitz zeta-function, Acta Math. Sinica 33 (1990) 160-171 (in Chinese).

[16] ———, On the Hurwitz zeta-function, Illinois J. Math. 35 (1991) 569-576.

[17] ———, On the mean square value of the Hurwitz zeta-

function, Illinois J. Math. 38 (1994) 71–78.

[18] ——, On the third power mean of Hurwitz zeta-function, J. Northwest Univ. (Nat. Sci. Edition) 24 (1994) 7–11 (in Chinese).

[19] ——, On the fourth power mean of Hurwitz zeta-function, Pure Appl. Math. (Xi'an) 12 (1996) 13–18.

(1998年1月11日)